10.2.6 Složená funkce

Předpoklady: 2601, 10101

Pedagogická poznámka: Hodina je posunuta do kapitoly derivací schválně, aby si studenti její obsah pamatovali v okamžiku, kdy ho budou potřebovat při derivování složených funkcí.

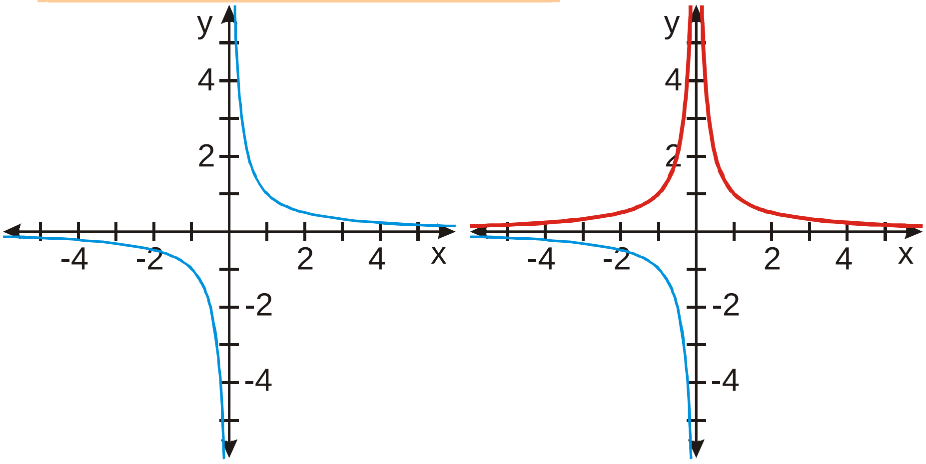
Vzpomeneme si na časy, kdy jsme kreslili grafy funkcí.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \left|\frac{1}{x}\right|$.

Zvolíme x

Nakreslíme funkci $y = f(x) = \frac{1}{x}$

Nakreslíme funkci $y = |f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right|$



postupovali jsme ve dvou krocích:

- nakreslili jsme graf funkce $z = f(x) = \frac{1}{x}$
- na hodnoty funkce $z = f(x) = \frac{1}{x}$ jsme nasadili funkci $y = g(z) = |z| = \left|\frac{1}{x}\right|$

$\Rightarrow$ získali jsme funkci $y = h(x) = g(f(x))$ (teď už nepotřebujeme písmenko *z* pro mezihodnoty)

Kdy bude tento postup fungovat?

- musí platit složený vzorec $y = \left|\frac{1}{x}\right| = g(f(x))$
- čísla *z*, která získáme z funkce $z = f(x)$, musí jít dosadit do funkce $y = g(z)$ $\Rightarrow$ do definičního oboru $D(f)$ patří jen taková čísla *x*, jejichž hodnoty $z = f(x)$ patří do definičního oboru $D(g)$.

$\Rightarrow$ **Říkáme, že funkce *h* je složena z funkcí *g*, *f*, právě když platí:**
$D(h)=\{x\in D(f), f(x)\in D(g)\}$ **a pro každé** $x\in D(h)$ **platí** $h(x)=g(f(x))$**.**
Funkci *h* označujeme symbolem $h=g\circ f$ (čteme *h* se rovná *g* na *f*). Skládání funkcí není komutativní $\Rightarrow$ $g\circ f\neq f\circ g$.

Dodatek: Pokud platí $h=g\circ f$ říká se někdy, že funkce *f* je funkce vnitřní a funkce *g* je funkce vnější.

Jak sestavíme složenou funkcí $h=g\circ f$ z funkcí $f(x)=3x-2$ a $g(x)=x^2+1$?

- rychle: $h(x)=g(f(x))=g(3x-2)=(3x-2)^2+1$
- pomaleji: pomůžeme si písmenem z: $z=f(x)=3x-2$ a $y=g(z)=z^2+1$
  $h(x)=g(z)=z^2+1=(3x-2)^2+1$

Pedagogická poznámka: Pro většinu studentů je předchozí vysvětlování zbytečné, asi třetina má problémy s orientací. Nejsem si jistý, zda má smysl ukazovat pomalejší dosazení pomocí proměnné *z*, některé studenty spíše plete a pokud je problematických počtářů menší počet, je možné zbývající problémy dořešit při počítání příkladu 2 a).

Př. 2: Jsou dány dvojice funkcí:
a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2x+1$
b) $f(x)=1-x$, $g(x)=\sqrt{x}$.
Najdi složené funkce $h=g\circ f$, a $k=f\circ g$ a urči jejich definiční obory.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2x+1$

$h=g\circ f=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{x}\right)+1=\frac{2}{x}+1$

$D(f)=R-\{0\}$, $D(g)=R$ $\Rightarrow$ $D(h)=R-\{0\}$

$k=f\circ g=f(g(x))=f(2x+1)=\frac{1}{2x+1}$

$D(f)=R$, $D(g)=R-\{0\}$ $\Rightarrow$ $2x+1\neq 0$ $\Rightarrow$ $x\neq -\frac{1}{2}$

$D(h)=R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) $f(x)=1-x$, $g(x)=\sqrt{x}$

$h=g\circ f=g(f(x))=g(1-x)=\sqrt{1-x}$

$D(f)=R$, $D(g)=\langle 0;\infty)$ $\Rightarrow$ $1-x\geq 0$ $\Rightarrow$ $1\geq x$

$D(h)=(-\infty;1\rangle$

$k = f \circ g = f\left(g(x)\right) = f\left(\sqrt{x}\right) = 1 - \sqrt{x}$

$D(f) = R,\ D(g) = R - \{0\} \Rightarrow D(h) = \langle 0; \infty)$

V budoucnu budeme potřebovat zejména určování funkcí, ze kterých je výsledná funkce složena.
Například funkce $y = \sqrt{x^2 + 1}$ je složena z funkcí $f(x) = x^2 + 1$ a $g(x) = \sqrt{x}$ jako $h = g \circ f$.

Př. 3: Najdi funkce, ze kterých jsou složeny následující složené funkce:

a) $y = \left|\sqrt{x} + 1\right|$ b) $y = (2x+1)^2$ c) $y = \dfrac{1}{x-1}$

d) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ e) $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ f) $y = (x+1)^3 + 2x + 3$

a) $y = \left|\sqrt{x} + 1\right|$

Funkce $y = \left|\sqrt{x} + 1\right|$ je složena z funkcí $f(x) = \sqrt{x} + 1$ a $g(x) = |x|$ jako $h = g \circ f$.

b) $y = (2x+1)^2$

Funkce $y = (2x+1)^2$ je složena z funkcí $f(x) = 2x + 1$ a $g(x) = x^2$ jako $h = g \circ f$.

c) $y = \dfrac{1}{x-1}$

Funkce $y = \dfrac{1}{x-1}$ je složena z funkcí $f(x) = x - 1$ a $g(x) = \dfrac{1}{x}$ jako $h = g \circ f$.

d) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$

Funkce $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$ je složena z funkcí $f(x) = x^2 + x$ a $g(x) = \dfrac{3}{x}$ jako $h = g \circ f$.

e) $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Funkce $y = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ je složena z funkcí $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a $g(x) = \sin x$ jako $h = g \circ f$.

f) $y = (x+1)^3 + 2x + 3$

Nejprve upravíme předpis funkce:

$y = (x+1)^3 + 2x + 3 = (x+1)^3 + 2x + 2 + 1 = (x+1)^3 + 2(x+1) + 1$

Funkce $y = (x+1)^3 + 2(x+1) + 1$ je složena z funkcí $f(x) = x + 1$ a $g(x) = x^3 + 2x + 1$ jako $h = g \circ f$.

Poznámka: Příklady, ve kterých se objevuje sčítání a odčítaní nejsou rozdělitelné jednoznačně. Například v bodě 3 a) můžeme také psát:

Funkce $y = \left|\sqrt{x} + 1\right|$ je složena z funkcí $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = |x + 1|$ jako $h = g \circ f$.

Pedagogická poznámka: Pokud se objeví více studentů, kteří si v bodě 3 a) nevědí rady, vyřešíme ho na tabuli. Studenty, kteří se nechytí ani potom, je možné dořešit v lavicích.

Některé funkce jsou složeny z více než dvou základních funkcí. Například funkce $y=\frac{2}{\sqrt{3x-2}}$ je složena z funkcí $f_1(x)=3x-2$, $f_2(x)=\sqrt{x}$ a $f_3(x)=\frac{2}{x}$ jako $g=f_3\circ(f_2\circ f_1)=f_3\circ f_2\circ f_1$.

Př. 4: Najdi funkce, ze kterých jsou složeny následující složené funkce:

a) $y=\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ b) $y=\frac{3}{\left|1-\sqrt{x}\right|}$ c) $y=\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)+1$

d) $y=\left|2^{\frac{2}{x^2-1}}-3\right|$ e) $y=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+2\right)^2}$ f) $y=\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right|-1$

a) $y=\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

$f_1(x)=x^2+1$, $f_2(x)=\sqrt{x}$, $f_3(x)=\sin x$

b) $y=\frac{3}{\left|1-\sqrt{x}\right|}$

$f_1(x)=1-\sqrt{x}$, $f_2(x)=|x|$, $f_3(x)=\frac{3}{x}$

c) $y=\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)+1$

$f_1(x)=\frac{1}{x}$, $f_2(x)=\cos x$, $f_3(x)=x^2+1$

d) $y=\left|2^{\frac{2}{x^2-1}}-3\right|$

$f_1(x)=x^2-1$, $f_2(x)=\frac{2}{x}$, $f_3(x)=2^x-3$, $f_4(x)=|x|$

e) $y=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+2\right)^2}$

$f_1(x)=\frac{1}{x}+2$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=\frac{1}{x}$

f) $y=\left|\left|\left|x-1\right|-2\right|-3\right|-1$

$f_1(x)=|x-1|$, $f_2(x)=|x-2|$, $f_3(x)=|x-3|$, $f_4(x)=x-1$

Př. 5: Je dána funkce $y = f(x) = 2x - 1$. Urči funkce f^{-1}, $h = f^{-1} \circ f$ a $k = f \circ f^{-1}$. Vysvětli.

Určujeme f^{-1}:
prohodíme *x* a *y*: $y = 2x - 1 \Rightarrow x = 2y - 1$

$2y = x + 1$

$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

$h = f^{-1} \circ f = \frac{2x-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x$

$k = f \circ f^{-1} = 2\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x$

$\Rightarrow$ pokud složíme funkce f a f^{-1} v libovolném pořadí získáme funkce $y = x$ (každé *x* se zobrazí samo na sebe), ale to jasné, protože jsme funkci f^{-1} hledali tak, abychom se dostali k číslům od kterých jsme začínali (obracením šipek).

Př. 6: Petáková:
strana 25/cvičení 15 b)
strana 25/cvičení 17 a) c) d) e)

Shrnutí: